

Hamilton - Jacobi

Eq. de Hamilton - Jacobi is

$$H(\{q_i\}, \{\frac{\partial S}{\partial q_i}\}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

On a vu que, si le système est isolé, on peut trouver une solution ou la solution peut être écrite en séparant le temps des autres variables :

$$S(\{q_i\}, \{c_i\}, t) = S_q(\{q_i\}, \{c_i\}) + S_t(t, \{c_i\})$$

et on arrive aux deux équations

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = -E$$

E = énergie, qui est constante car le système est isolé

et

$$H(\{q_i\}, \{\frac{\partial S_q}{\partial q_i}\}) = E$$

Traditionnellement, cette équation on l'écrit avec W à la place de S_q et on l'appelle "équation caractéristique de Hamilton - Jacobi"

$$\boxed{H(\{q_i\}, \{\frac{\partial W}{\partial q_i}\}) = E}$$

Si la solution de cette équation existe, donc si on a les 3n constantes du mouvement, on aurait la fonction génératrice de la transformation qui est W

De plus :

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t}$$

mais W ne dépend pas de t , par construction

Donc

$$K = H(\{q_i\}, \{p_i\}) = E$$

(c'est justement l'éq.
caractéristique de $H \cdot J$)

D'autre côté on sait que les constantes du mouvement deviennent les nouvelles impulsions : $E = p_1$ ("1" par tradition)

ça veut dire que $K = p_1$ et donc les équations canoniques pour les nouvelles variables sont

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i} = \frac{\partial p_1}{\partial p_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \\ 0 & \text{si } i>1 \end{cases} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = -\frac{\partial p_1}{\partial Q_i} = 0 \end{cases}$$

La solution est donc

$$\begin{cases} Q_1(t) = t + Q_1(0) \\ Q_i(t) = Q_i(0) & \text{si } i>1 \\ p_i(t) = p_i(0) \end{cases}$$

Il s'agit d'une solution à peine plus compliquée que toutes constantes, mais toujours simple !

Le fait que $W(\{q_i\}, \{p_i\})$ ne dépende pas du temps est avantageux pour comprendre une différence fondamentale entre un système intégrable et un système qui n'est pas intégrable.

D'abord :

$$\begin{cases} Q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}(\{q_i\}, \{p_i\}) \\ P_i = -\frac{\partial W}{\partial q_i}(\{q_i\}, \{p_i\}) \end{cases}$$

implique que la relation entre $\{q_i\}, \{p_i\}$ et $\{Q_i\}, \{P_i\}$ engendrée par la transformation canonique ne dépende pas explicitement du temps. C'est à dire :

$$\begin{cases} Q_i(t) = \delta_{i,1} t + Q_i(\{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}) \\ P_i(t) = P_i(\{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}) \end{cases}$$

et en revenant sur $\{q_i\}, \{p_i\}$:

$$\begin{cases} q_i(t) = q_i(\{Q_i(t)\}, \{P_i(t)\}) \\ p_i(t) = p_i(\{Q_i(t)\}, \{P_i(t)\}) \end{cases}$$

↳ seul Q_1 dépende en effet de t et la forme explicite de la trajectoire, $\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}$ est déterminée par une fonction (en générale non linéaire) appliqué à $Q_1(t) = t + Q_1(0)$

En notation compacte :

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{y} \quad \text{avec}$$

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (\text{engendré par } W)$$

$$\vec{x} = \vec{f}^{-1}(\vec{y})$$

Les $\vec{y}$ satisfont les équations canoniques

$$\dot{\vec{y}} = \vec{\omega} \quad \text{avec}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{pour } Q_1 \\ \leftarrow 3N-1 \text{ pour } Q_i \quad i > 1 \\ \leftarrow 3N \text{ pour } P_i \end{array}$$

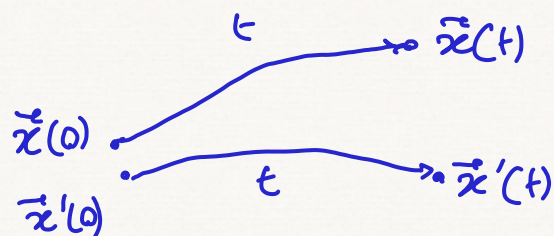
avec solution

$$\vec{y}(t) = \vec{\omega}t + \vec{y}(0) = \vec{\omega}t + \vec{f}(\vec{x}(0))$$

et donc

$$\vec{x}(t) = \vec{f}^{-1}(\vec{\omega}t + \vec{f}(\vec{x}(0)))$$

On pose la question : deux trajectoires partent des conditions initiales $\vec{x}(0)$ et $\vec{x}'(0)$, qui sont différentes par $\delta\vec{x}(0)$



$$\vec{x}'(t) - \vec{x}(t) = \delta\vec{x}(t)$$

$$\vec{x}'(0) - \vec{x}(0) = \delta\vec{x}(0)$$

Comment se comporte $\delta\vec{x}(t)$? Est-il du même ordre que $\delta\vec{x}(0)$, plus grande ou plus petit ?

La trajectoire du système est complètement déterminée par les conditions initiales, et elle est une transformation canonique, donc

$$\vec{x}(t) = \vec{g}(\vec{x}(0), t) \quad \text{et}$$

$$\vec{x}'(t) = \vec{g}'(\vec{x}(0), t)$$

La deuxième est aussi

$$\vec{x}(t) + \delta \vec{x}(t) = \vec{g}(\vec{x}(0) + \delta \vec{x}(0), t)$$

on peut développer à droite par $\delta \vec{x}(0)$:

$$\cancel{\vec{x}(t)} + \delta \vec{x}(t) = \underbrace{\cancel{\vec{g}(\vec{x}(0), t)}}_{\vec{x}(t)} + \underbrace{\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}(0), t) \cdot \delta \vec{x}(0)}_{\underline{M}(\vec{x}(0), t)}$$

↙ matrice symplectique!

Donc, si on l'applique à t et $t + \Delta t$

$$\delta \vec{x}(t) = \underline{M}(\vec{x}(0), t) \cdot \delta \vec{x}(0)$$

Maintenant : on applique la même relation entre t et $t + \Delta t$:

$$\delta \vec{x}(t + \Delta t) = \underline{M}(\vec{x}(t), \Delta t) \cdot \delta \vec{x}(t)$$

on prend $t = \Delta t$ petit et on développe $\underline{M}(\vec{x}(0), t)$

$$\underline{M}(\vec{x}(0), \Delta t) \simeq \underbrace{\underline{I}}_{\substack{\uparrow \\ \Delta t = 0}} + \underline{M}'(\vec{x}(0)) \cdot \Delta t + O(\Delta t^2)$$

Donc

$$\delta \vec{x}(t + \Delta t) = \delta \vec{x}(t) + \Delta t \underline{M}'(\vec{x}(t)) \cdot \delta \vec{x}(t)$$

et

$$\frac{\delta \vec{x}(t+\Delta t) - \delta \vec{x}(t)}{\Delta t} = \underline{M}'(t) \cdot \delta \vec{x}(t)$$

on prend la limite $\Delta t \rightarrow 0$

$$\delta \dot{\vec{x}} = \underline{M}'(t) \cdot \delta \vec{x}$$

Dans un voisinage de t on peut considérer $\underline{M}'(t)$ constante et on a donc que, si on développe $\delta \vec{x}$ en vecteurs propres de $\underline{M}'$,

$$\delta \vec{x} = \sum_k c_k(t) \vec{v}_k \quad \text{avec} \quad \underline{M}' \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$$

et la solution est

$$\delta \vec{x}(t') = \sum_k c_k(t) e^{\lambda_k(t'-t)} \vec{v}_k$$

Qu'est-ce qu'on sait des λ_k ?

λ_k sont les valeurs propres de $\underline{M}'$, mais on se rappelle que

$$\underline{M} = \underline{I} + \underline{M}' \cdot \Delta t$$

$$\text{et } \det \underline{M} = 1 = \prod_k (1 + \lambda_k \Delta t) \approx 1 + \left(\sum_k \lambda_k \right) \Delta t + O(\Delta t^2)$$

$\det \underline{M}$ est le produit
des valeurs propres

Donc

$$\sum_k \lambda_k = 0 \quad \text{pour garder } \det \underline{M} = 1$$

Il suffit un $\lambda_k < 0$ pour que $\exists k'$ t.q. $\lambda_{k'} > 0$

Mais si $\exists k'$ t.q. $\lambda_{k'} > 0$ alors

$\delta \vec{x}(t')$ diverge exponentiellement de $\delta \vec{x}(t)$

Autrement dit, deux trajectoires qui partent proches l'une de l'autre peuvent s'éloigner exponentiellement l'une de l'autre, avec un taux qui est déterminé par le plus grand des $\{\lambda_k\}$ [les $\{\lambda_k\}$ s'appellent exposants de Lyapounov].

Qu'est-ce qui se passe pour un système intégrable isolé?

Dans ce cas on rappelle que

$$\vec{x}(t) = \vec{f}^{-1}(\vec{y}(t)) = \vec{f}^{-1}(\vec{\omega}t + \vec{y}(0)) = \vec{f}^{-1}(\vec{\omega}t + \vec{f}(\vec{x}(0)))$$

$$\begin{aligned}\vec{x}'(t) &= \vec{f}^{-1}(\vec{y}'(t)) = \vec{f}^{-1}(\vec{\omega}'t + \vec{y}'(0)) = \vec{f}^{-1}(\vec{\omega}'t + \vec{f}(\vec{x}'(0))) = \\ &= \vec{f}^{-1}(\vec{\omega}'t + \vec{f}(\vec{x}(0) + \delta\vec{x}(0)))\end{aligned}$$

On développe $\vec{x}'(t)$ par rapport à $\delta\vec{x}(0)$:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) + \delta\vec{x}(t) &= \overbrace{\vec{f}^{-1}(\vec{y}(t))}^{\vec{x}(t)} + \left. \frac{\partial \vec{f}^{-1}}{\partial \vec{y}} \right|_{\vec{y}=0} \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=0} \cdot \delta\vec{x}(0) + \\ &+ \left. \frac{\partial \vec{f}^{-1}}{\partial \vec{y}} \right|_{\vec{y}=0} \underbrace{\left. \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=0}}_{\vec{\omega} \text{ est constante}} \cdot t \delta\vec{x}(0) \\ &\quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{x}} = 0 \right)\end{aligned}$$

Et enfin on a

$$\begin{aligned}\delta\vec{x}(t) &= \underbrace{\frac{\partial \vec{f}^{-1}}{\partial \vec{y}} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}}_{\substack{= M^{-1} \cdot M \\ = I}} t \delta\vec{x}(0) = t \delta\vec{x}(0)\end{aligned}$$

Le résultat est que

$$\delta \vec{x}(t) = t \delta \vec{x}(0)$$

Mais dans ce cas on a pas demandé Δt petit !!!

Donc les deux trajectoires restent toujours linéairement proches l'une à l'autre.

Pour résumer :

Système intégrable : une petite différence initiale, ou un petit erreur pendant une intégration numérique, reste petite !

On peut faire des prédictions !

Système non-intégrable : une petite différence initiale ou un erreur d'intégration numérique va exploser exponentiellement, avec un taux qui est $\max_k \lambda_k$

Il est difficile de faire des prédictions !

Les équations des fluides qui gèrent les prévisions météo ne sont pas intégrables ! Donc les prédictions perdent de fiabilité après un temps $\frac{1}{\lambda_{\max}} \sim 1$ semaine

Prendons le système terre - lune - soleil :

E est conservé
 $\vec{P}$ est conservé
 $\vec{L}$ est conservé

} 7 constantes du mouvement

Mais les degrés de liberté sont 9 $\Rightarrow$ système non-intégrable !!!
Donc tôt ou tard notre capacité de prédire, par exemple, les éclipses, va tomber... après des millions d'années ($\frac{1}{\lambda_{\max}}$)

Cette perte de capacité de faire des prédictions pour des systèmes non-intégrables est à la base des systèmes chaotiques : le chaos déterministique : systèmes déterministes mais tels que faire des prédictions est impossible et ils se comportent comme s'ils étaient aléatoires.

